Programm

des

Lyceums zu Hannover

womit zu der

am 15. und 16. April 1859 stattfindenden

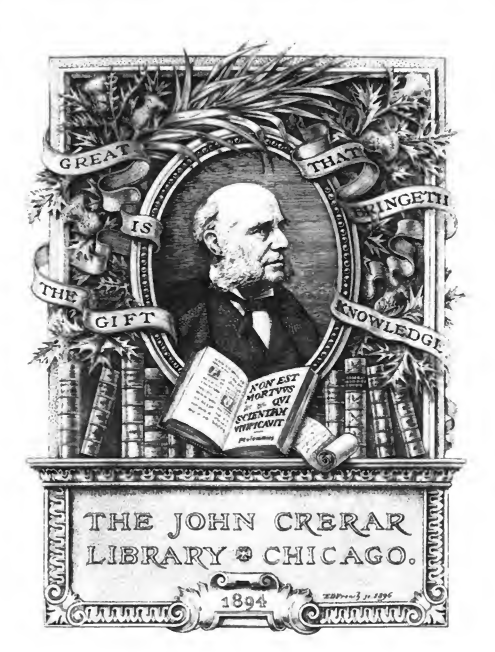
öffentlichen Prüfung der untern Klassen

ergebenst einladet

Dr. Heinrich Ludolf Ahrens, Director.

1) Über das unendlich Kleine. Vom Collab. Meyer.
2) Schulnachrichten.

Hannover.
Schrift und Druck von Fr. Culemann.
1859.


GREAT IS THE GIFT THAT BRINGETH KNOWLEDGE
NON EST MORTUUS QUI SCIENTIAM VIVIFICAVIT
THE JOHN CRERAR LIBRARY CHICAGO.
1894

Programm

des

Lyceums zu Hannover,

womit zu der

am 15. und 16. April 1859 stattfindenden

öffentlichen Prüfung der untern Klassen

ergebenst einladet

Dr. Heinrich Ludolf Ahrens, Director.

1. Über das unendlich Kleine. Von Collab. Mejer.
2. Schulnachrichten.

Hannover.
Schrift und Druck von Fr. Culemann.
1859.

Ueber das unendlich Kleine.

Einleitung.

Es liegt etwas so verlockendes in dem Streben sich das Unendliche unmittelbar darzustellen, es scheint so leicht erreichbar, so nahe eben nur über dem Endlichen zu liegen, daß von diesem Schein betrogen nicht nur jeder einzelne Mensch beinah sich den Begriff, dessen Nothwendigkeit er einsieht, auch anschaulich zu machen sucht, sondern selbst die Wissenschaft lange durch dies Streben in die Irre geführt ist. Das ist es eben, wodurch wir das Unendliche vom Endlichen unterscheiden, die einzige, freilich nur negative Eigenschaft des Unendlichen, die wir unmittelbar begreifen, daß es nicht erfaßt werden kann; denn könnte es erfaßt werden, so müßte es in einem Zahlenausdrucke geschehen und sobald ein solcher möglich wäre, so fiele das Unendliche unter die Kategorie des Endlichen.

Ich habe in den folgenden Sätzen versucht den umgekehrten Weg einzuschlagen; statt **a priori** das Unendliche zu construieren, aus den Erfahrungen, welche die Mathematik bietet, die Eigenschaften des Unendlichen und aus diesen die Rechnungsoperationen darzulegen, welche mit unendlichen Größen möglich sind. Bei dem allgemeinen Schwanken und Zweifeln, welchem dieser Begriff unterworfen ist, gewähren diese mathematischen Erfahrungen den einzigen sicheren Anhaltspunkt, von welchem man ausgehn kann.

Die Mathematik kann das Unendliche in keiner Weise entbehren; schon in den ersten Anfängen tritt es uns entgegen, es begleitet uns durch den ganzen Verlauf der mathematischen

Untersuchungen hindurch, um in der höhern Mathematik völlig den Mittelpunkt derselben zu bilden. So geben uns die mathematischen Sätze Anhaltspunkte genug für unsere Untersuchung und in diesen Sätzen kann dem Charakter der Mathematik gemäß kein Schwanken herrschen; sie müssen uns deshalb als völlig bewiesene, unabweisbare Wahrheiten dienen. Diesem Character der Wissenschaft gemäß kann man die Mathematik selbst wohl eine Erfahrungswissenschaft nennen, da alle mathematischen Sätze völlig unabhängig von den individuellen Ansichten der Mathematiker sind. Das System der Wissenschaft steht so unveränderlich fest, daß die gesammte Menschheit sich eben so zu ihm verhält, wie jeder einzelne Mensch, der sich das gegebene Material zu eigen zu machen sucht. Ein Abgehn von dem, was die Mathematik einmal gesetzt hat, oder eine subjective Auffassung ist dem einzelnen Menschen unmöglich; jedes Weiterforschen nach einer neuen Seite der Wissenschaft ist für die gesammte Menschheit nur ein Zulernen, eine neue Erfahrung. Demnach dürfen und müssen wir die Sätze der Mathematik so benutzen, daß wir aus der Art, wie durch sie ein mathematischer Begriff sich gestaltet, diesen Begriff definieren und in seinen Haupteigenschaften auffassen, wie dies unabänderlich und unbedenklich in der Mathematik überall geschieht.

Hiernach setzen wir von folgenden Gesichtspunkten aus die das unendlich Kleine betreffenden mathematischen Sätze als Ausgangspunkte unserer Untersuchung:

1) Die mathematische Wissenschaft beruht auf den ureigensten Anschauungsformen des Menschengeistes; aus diesen heraus entwickelt sich ihr System ohne Beimischung von etwas fremdartigem, ohne Einwirkung von etwas äußerlich bestimmendem. Aus diesem System abstrahieren wir dann wieder unsere Kenntniß der zu Grunde liegenden Anschauungsformen, die sowohl durch ihre stets nothwendigerweise identische Auffassung im Systeme der Mathematik, als auch, weil sie als die ureigenen Anschauungsformen nicht etwa frei construiert werden können, sondern der Entwickelung freilich harrend vom Anfange her in jedem Menschengeiste liegen, unabänderlich und zweifellos werden. Beide genannten Kriterien passen auch auf den Begriff des unendlich Kleinen; die Nothwendigkeit, mit der die Mathematik

auf das unendlich Kleine geführt wird, die stete Identität dieses Begriffs in allen Sätzen beweist uns nicht allein die Existenz des unendlich Kleinen als eine jener Anschauungsformen, sondern gewährt auch die Möglichkeit einer genauen Characteristik dieses Begriffs.

2) Der zweite Gesichtspunkt, daß die Mathematik vor allen anderen die Wissenschaft der Consequenz ist, da sie nicht nöthig hat nach äußeren Einflüssen ihre Resultate zu modificieren, sondern jedes Resultat im innersten Wesen der Wissenschaft begründet ist, muß uns dahin leiten, daß wir alle Forderungen der Wissenschaft unseren Erklärungen gegenüber im vollen Rechte lassen, die letztern nach den erstern, nicht umgekehrt, wie es gerade beim unendlich Kleinen oft genug geschehen ist, modificieren. Jede Consequenz, zu der die Wissenschaft hinführt, ist absolut wahr, selbst wenn die durch ihre Richtung auf das Endliche beschränkte Vernunft sich sträubt die Wahrheit zuzugestehen. Eine Folgerung ist nur dann falsch, wenn sie mit einer anderen in directem Widerspruche steht, und dann muß sich die Unrichtigkeit auch in dem Gedankengange, der uns dahin geleitet hat, nachweisen lassen.

§. 1.

Vom Begriff des unendlich Kleinen im Allgemeinen.

Das unendlich Kleine bildet den Mittelpunkt unserer Untersuchung. Freilich könnte es näher zu liegen scheinen, vom unendlich Großen auszugehen, denn als nächstliegende Erklärung jenes Begriffs wird meist folgende gegeben: das unendlich Kleine entsteht dadurch, daß eine endliche Größe in unendlich viel Theile zerlegt wird; indem das unendlich Große und Kleine daher mit ganzen Zahlen und Brüchen verglichen würden, so wäre demgemäß das unendlich Große der einfachere Begriff. Aber einerseits ist das unendlich Große in der Mathematik weit seltener und in seiner Anwendung weit beschränkter, als das unendlich Kleine und es giebt demnach die Wissenschaft darüber weit weniger Anhaltspunkte; andrerseits wird man gewöhnlich auf eine andere Art unmittelbar auf das unendlich Kleine hingeführt. Jedoch werden wir späterhin auch das un-

endlich Große in den Bereich unserer Untersuchung ziehen müssen, da in der endlichen Größe, von der wir in allen mathematischen Untersuchungen ausgehen und auf die wir zurückgeführt werden müssen, neben dem Werthe des unendlich kleinen Theils auch stets die unendlich große Zahl dieser Theile in Betracht kommt und überall vom Endlichen aus kein Weg zu dem Unendlichen führt, als durch das Unendliche hindurch.

Anschließend an die Art der Rechnung, die uns unmittelbar auf den Begriff des unendlich Kleinen hinleitet, geben wir zunächst folgende Erklärung: Theilen wir eine endliche Größe in eine beliebige Zahl endlicher Theile, und fahren stetig fort einen der erhaltenen Theile immer aufs neue zu zerlegen; so ist so lange eine fernere Verkleinerung denkbar, als die Theile endlich sind, als ein wenn auch noch so kleiner Zahlenausdruck die ursprüngliche Größe mit dem Theile zu vergleichen erlaubt. Die unendlich kleinen Theile müssen solche Beschaffenheit haben, daß dem Endlichen gegenüber eine weitere Verkleinerung unmöglich ist, und dies ist dann der Fall, wenn der relative Zahlenwerth eines solchen Theiles = 0 ist.

Es zeigt sich das unendlich Kleine allen mathematischen Erfahrungen gemäß so beständig als der kleinste Theil endlicher Größen vom Zahlenwerthe 0, daß ein Beweis der Richtigkeit der Erklärung von diesem Gesichtspunkte aus nicht gegeben zu werden brauchte. Es ist dagegen eine Rechtfertigung nothwendig, um nachzuweisen, daß der Begriff des unendlich Kleinen so, wie erklärt ist, überall existieren kann und um auch diejenigen Eigenschaften des Unendlichen, welche in jener Erklärung keinen Platz finden, darzulegen.

Die gewöhnliche Quelle aller Halbheiten in Bezug auf die Erklärung des unendlich Kleinen entspringt aus dem Umstande, daß man das Unendliche mit dem Endlosen verwechselt; aus diesem Grunde ist auch der Name „unendlich" gewählt, der freilich von uns hier nicht angefochten werden soll, da er sich immerhin recht passend dem des Endlichen, in unserer Anschauung begrenzten entgegenstellt. Diesen Unterschied zwischen dem Unendlichen und dem Endlosen werden wir im folgenden von anderen Prämissen aus in §. 3 entwickeln. Wie uns

dieser Unterschied, den wir hier aus den allgemeinen, in der Einleitung voraufgeschickten Sätzen darlegen wollen, die wichtigsten mathematischen Eigenschaften des uns vorliegenden Begriffs ergiebt, so ist er auch Ursache aller der Erklärungen gewesen, welche die darin liegenden Schwierigkeiten zu umgehen suchen. Ueber diese letzteren müssen wir einige Worte voraufschicken.

Man wird am einfachsten und nächsten auf den Begriff unendlich klein hingeführt durch jene unendlichen geometrischen Reihen, die das Zahlenverhältniß zwischen zwei irrationalen Größen in Form eines Decimalbruchs darstellen. In denselben übersieht man leicht, wie der Werth der Ziffern an den verschiedenen Decimalstellen kleiner und kleiner wird, und endlich Theile von solcher Kleinheit ergiebt, daß weder unsere Sinne, noch unsere Instrumente weitere Verkleinerung der Größe gestatten. Aber auch über diese Theile führt der Zahlenausdruck hinaus; selbst der Werth der Theile, die wir nach Millionen von Decimalstellen erreichen, kann noch nicht der kleinste sein; es hindert uns nichts diese Werthe wieder als Einheiten in ebenso viele Theile zu zerlegen. Man übersieht vom Endlichen aus stets nur die endlichen Theile; die Frage, was das Unendliche ist, läßt sich, wenn man vom Endlichen ausgeht, eben nur negativ so lösen, daß man angiebt, das Unendliche liegt über alle endlichen Werthe hinaus, zwischen Endlichen und Unendlichen giebt es keinerlei Verbindung.

Wenn man nun bedenkt, in welch ungeheure Entfernungen man sich durch stetige Vergrößerung der Zahlen, durch Potenzen, durch Potenzen von Potenzen hineinrechnen kann, so daß leicht der Gedanke erweckt wird, man könne die Reihe der das Endliche darstellenden Zahlen selbst endlos nennen, weil wir kein Ende derselben übersehen können; wenn man ferner beachtet, daß in den speciellen Fällen die Endlosigkeit jener die Irrationalgrößen darstellenden geometrischen Reihen sich jedesmal nachweisen läßt; so ergiebt sich leicht daraus die nächstliegende, aber durchaus falsche Erklärung: das unendlich Kleine ist das letzte Glied einer endlosen geometrischen Reihe. Der in dieser Erklärung vorhandene unlösbare Widerspruch steigert sich noch durch folgendes: nach den Erfahrungen, welche die Mathematik bietet, bewahrt das unendlich Kleine als Theil einer Größe den

Größencharakter soweit, daß eine weitere Theilung dessel
nicht nur als möglich erscheint, sondern auch in vielen Sät
der Mathematik mit Nothwendigkeit gefordert wird (ein Beisp
wo selbst unendlich kleine Theile des unendlich Kleinen geford
werden, wird am Schluß des §. 3 gegeben werden); aber ei
endlose Theilung schließt jede andere Theilung aus.

So verwickelt uns eine rein a prioritische Darstellun
des unendlich Kleinen gleich von vornherein in unüberwindlic
Schwierigkeiten; und wo diese hervortreten, genügen sie natürlic
um von weiterer Untersuchung abzuschrecken. Wenn man d
von ausgeht, daß das unendlich Kleine Resultat einer Theilun
ohne Ende, das letzte Glied einer endlosen Reihe, der nic
weiter verkleinerbar kleinste Theil einer endlichen Größe sei, s
ist die ganz natürliche Folgerung: es kann solche Größe ga
nicht existieren; es genügt deshalb irgend ein beliebiges Glie
der Reihe als das letzte anzusehen, es ist das die das unendlic
Kleine charakterisierende Eigenschaft, daß es kleiner und imme
kleiner gedacht werden kann, ohne je einen wirklich begrenzte
Werth zu haben. Geht man davon aus, daß unsere sinnlich
Erkenntniß beschränkt ist, daß demnach Theile von a prior
bestimmbarer Kleinheit bei Messungen und Berechnungen nich
mehr in Betracht kommen können, so genügt am Ende diese
Erklärung ebensowohl, als es genügt die Irrationalzahlen nur
bis zu einer gewissen Stellenzahl zu geben. Muß man doch
auch z. B. den Winkel, den zwei in nicht zu großer Entfernung
von einander aufgehängte Lothe bilden, obwohl er endlich ist,
doch unendlich klein nennen, ebenso wie uns die endliche Entfernung der Erde von einem beliebigen Fixsterne unendlich groß
erscheint, weil unsere Mittel zur Bestimmung dieser Größen
nicht ausreichen. Wir werden später nachweisen, unter welchen
Bedingungen es erlaubt ist, überall sich das unendlich Kleine
durch das endlich Kleine zu versinnlichen und es wird sich daraus ergeben, daß für die Praxis, für die wirkliche Rechnung
eine noch einfachere Erklärung des Begriffs unendlich klein
völlig ausreicht: es genügt, einen bestimmten sehr kleinen Theil
jeder Größe je nach ihrer Beschaffenheit als den kleinsten zu
setzen und dann anzugeben: das unendlich Kleine ist kleiner, als
dieser kleinste Theil.

Derartige Erklärungen genügen jedoch nicht den offenbaren Forderungen der Mathematik und ihrer strengwissenschaftlichen Methode. Wir gehen daher den in der Einleitung ausgesprochenen Grundsätzen gemäß a posteriori vom Begriff des unendlich Kleinen aus, und indem wir natürlich darauf verzichten das Unendliche durch ein bestimmtes Zahlenverhältniß mit dem Endlichen zu verbinden; setzen wir beides als principiell unterschieden, als zwei nie in einander übergehende Größenarten; um zum Unendlichen vom Endlichen aus zu gelangen, haben wir die sie trennende Kluft zu überspringen. Gehen wir nun wieder von der uns vorliegenden endlosen geometrischen Reihe aus, die wir oben schon als Ausgangspunkt unserer Untersuchung gesetzt hatten, so finden wir, wenn wir die Forderungen zusammenstellen, daß das unendlich Kleine nicht bloß existiert, sondern auch noch ferner muß getheilt werden können: daß in jener Reihe nicht das nicht existierende letzte Glied das unendlich Kleine ist, sondern irgend eins der früheren Glieder, das uns die Unanschaulichkeit des Begriffs nicht näher zu bezeichnen gestattet; das Unendliche ist nicht das Unbegrenzte oder Endlose, sondern muß eine wirkliche Grenze haben.

So erhalten wir nach einer begrenzten, aber darum freilich nie absehbaren oder erreichbaren Reihe von Gliedern solch geometrischer Reihe das unendlich Kleine und es beweist der Umstand, daß jene Zahlenreihe endlos ist, nichts gegen die factische Begrenzung des Unendlichen, weil der unendlich kleine Rest, den man übrig behält, sobald das unendlich Kleine erreicht ist, den Zahlenwerth 0 hat. Es ist demnach die unendliche Reihe schon ohne den bis ins Endlose verlaufenden Rest vollkommen der Größe, die sie darstellen soll, gleich, weil ihr Unterschied unendlich klein, d. h. $= 0$ ist.

Wenn man bei praktischen Rechnungen sich darin ergeben muß, den endlichen Rest als unendlich klein, d. h. $= 0$ zu setzen, so zeigt sich uns nun aus dem Vorhergehenden der Grund, weßhalb diese gewöhnliche Rechnungspraxis mit dem, was die Wissenschaft fordert, zusammenfällt, da in den erwähnten Reihen stets ein unendlich kleiner Rest übrig bleiben muß. In derselben Weise muß man bei bildlichen Darstellungen in der Geometrie gestatten Linien durch wirklich Körper darzustellen,

wobei natürlich der Unterschied zwischen dem Bilde und der Lin[ie] streng erhalten wird. Indem wir diesen Punkt, daß wir da[s] unendlich Kleine nicht als letztes Glied der endlosen Reihen an[-] zusehen haben, in der im Anfange dieses §. gegebenen Er[-] klärung berücksichtigen mußten, gaben wir dort den Umstand, daß das unendlich Kleine dem Endlichen gegenüber nicht weite[r] verkleinert werden kann, als das eigentlich charakteristisch[e] Merkmal jenes Begriffs an; in diesem Sinne kann man den unendlich kleinen Theil auch den kleinstmöglichen Theil einer Größe nennen. Eine weitere Verkleinerung ist deswegen unmöglich, weil der Zahlenwerth des unendlich Kleinen dem Endlichen gegenüber gleich 0 ist, so daß dasselbe trotz der möglichen Verschiedenheit seiner absoluten Werthe doch stets dem Endlichen gegenüber völlig unverändert bleibt. Es kann nicht allein weiter getheilt werden, sondern auch Multiplication, Wurzelausziehung &c. lassen seinen Charakter stets in dem Maße unverändert, daß es in allen diesen Formen unverändert „unendlich klein" benannt werden muß.

Eine neue Quelle von Schwierigkeiten entspringt jedoch aus dem Nullwerthe des unendlich Kleinen. Wir werden deshalb im folgenden §. nachzuweisen haben, daß und wie es möglich ist, daß dasselbe, trotzdem daß es Theil einer Größe, ja eine Größe selbst ist, diesen Werth annehmen kann.

§. 2.

Der Zahlenwerth des unendlich Kleinen ist = 0.

Nachdem wir oben an der unendlichen abnehmenden geometrischen Reihe nachgewiesen haben, wie die scheinbaren Widersprüche zu vereinigen sind, daß dasselbe nämlich zugleich kleinster Theil einer Größe und dabei doch weiterhin bis ins Endlose hinein theilbar ist, und die Lösung dadurch gegeben haben, daß wir seinen Werth dem Endlichen gegenüber = 0 setzten, müssen wir im Folgenden diese Eigenschaft des unendlich Kleinen näher ins Auge fassen; und um das Endliche dem Unendlichen unmittelbar gegenüberzustellen, setzen wir von nun an den Begriff des unendlich Kleinen so, daß wir es als den unendlich vielfachen Theil einer endlichen Größe bezeichnen. Es folgt dar-

aus, daß man durch unendlich Vielfachsetzen eines unendlich kleinen Theils wieder eine endliche Größe erhalten muß.

Dieser Punkt, den unsere beschränkte Vernunft sich natürlich ebenso wenig zur Anschaulichkeit bringen kann, als es umgekehrt aus dem Endlichen das unendlich Kleine zu entwickeln ihr unmöglich ist, bietet zunächst große Schwierigkeiten. Die Frage, wie aus dem Nichts je etwas durch eigene Kraft, ohne Hinzufügung von etwas Fremdem, aus dem Nichtsein je ein Sein werden könne, hat die Philosophie oft beschäftigt und diese setzt diesen Vorgang als unmöglich — und mit vollem Rechte. Wenn trotzdem die Mathematik fordert, daß eine endliche Größe in Theile vom Werthe 0 zerlegt werden, daß durch Vielfachsetzen eines solchen Theiles wieder eine endliche Größe sich bilden soll, wie haben wir diese beiden scheinbar unversöhnlichen Widersprüche zu vereinigen, daß wir beide Forderungen in ihrem Rechte lassen?

In unserer Erklärung betonten wir den Umstand, daß das unendlich Kleine dem Endlichen gegenüber oder vielmehr neben demselben den Werth 0 habe, so daß (wenn wir zur Abkürzung das unendlich Kleine durch dx bezeichnen) $1 + dx = 1$ ist. Man könnte nun versucht sein durch folgende Gründe, um die aus dem ebengenannten Widerspruche hervorgehenden Schwierigkeiten zu vermeiden, den wirklichen Nullwerth des unendlich Kleinen zu bestreiten und den des verschwindend Kleinen dafür an die Stelle zu setzen. Wenn man die Gleichung $1 + dx = 1$ mit ∞ multiplicirt, so erhält man $\infty + a = \infty$, d. h. die endliche Größe a hat neben ∞ den Werth 0. Da aber a niemals diesen Werth haben kann, so darf man höchstens sagen, daß a gegen ∞ verschwindend klein ist. Dieser Grund ist jedoch nicht stichhaltig. Wir treten vom Endlichen nach beiden Seiten dem Unendlichen als dem Unbekannten gegenüber und dürfen aus dem Endlichen auf das Verhalten, auf die Eigenschaften des Unendlichen schließen; der umgekehrte Schluß kann uns nicht gestattet sein.

Wenn wir wieder a posteriori von der Nothwendigkeit das unendlich Kleine in seinem Nullwerthe aufzufassen ausgehen und damit die oben dargelegte Forderung der Philosophie, daß aus Nichts nie ein Etwas werden kann, zusammen halten, so

ergiebt sich daraus unmittelbar, daß das unendlich Kleine jedenfalls etwas anderes sein muß, als das Nichts; schon die Verschiedenheit des Namens deutet auf diese Verschiedenheit des Wesens hin.

Wir haben dieses in unserer Erklärung dadurch angedeutet, daß wir dem unendlich Kleinen den Zahlenwerth 0 zuschrieben und zwischen 0 selbst — dem Zeichen für das Nichtsein, des Nichts — und dem Zahlenwerthe 0 scharf zu unterscheiden uns offen hielten. Das erstere wird durch Subtraction allein gewonnen; durch Division, auch durch endlose, erreicht man es nie. Von diesem Unterschiede aus definiren wir das unendlich Kleine als Existenz im Nullpunkte im Gegensatz zu dem Nichts, der Nichtexistenz, und dieser Unterschied löst alle Schwierigkeiten aufs Vortrefflichste. Wir haben nun, da unsere Vernunft sich sträubt, diese Vereinigung von Sein und Nichtsein in derselben Größe anzuerkennen, den Beweis zu führen, daß solche Existenz im Nullpunkte überall möglich ist.

Wie wir oben unsere Beispiele stets aus dem Bereich der Zahl gewählt haben, so ist man auch hier zunächst versucht, diesen Nachweis an der Zahl zu führen. Es ist dies ganz natürlich. Wir dürfen das als Hauptmerkmal einer Größe bezeichnen, daß es erlaubt sein muß, sie unter einem Zahlenausdruck darzustellen; — darnach dürfen wir auch das unendlich Kleine unter dem Begriff der Größe subsummiren, wie dies zuweilen geschehen muß. — So gelten im Allgemeinen die Regeln, die man als an Zahlen zuläßig nachweist, für alle Größen. Da jedoch eine Zahlengröße vom Werthe 0 von der 0 selbst unmöglich geschieden werden kann, zumal da der Begriff Zahl selbst zu abstract ist, um Anschaulichkeit zu gewähren; so müssen wir hier ein Beispiel aus einem anderen Größenkreise suchen, das die Möglichkeit der Existenz einer Größe im Nullpunkte beweist. Da es sich nur um den Nachweis der Möglichkeit handelt, so genügt natürlich jedes Beispiel; aber auch die Allgemeingültigkeit desselben folgt leicht aus den in der Einleitung voraufgeschickten Sätzen.

Als Beispiel, das uns die Existenz des unendlich Kleinen und seine Verschiedenheit von der Null am einfachsten beweist, wählen wir ein geometrisches, den Punkt; wir dürfen dies um so zweifelloser thun, da gerade hier der Nullcharacter am schärf-

sten hervorgehoben zu werden pflegt, schärfer sogar, als eigentlich richtig ist. Man giebt gewöhnlich an, daß der Punkt **keine** Ausdehnung habe und dies ist der endlichen Ausdehnung der Linien 2c. gegenüber allerdings richtig; weit besser jedoch nennen wir die Ausdehnung unendlich klein, da auf diese Weise allein überhaupt die Existenz des Punktes möglich wird. Denn da wir die Negation der Ausdehnung überall einem Begriffe, der auf dem geometrischen Character der Ausdehnung wenigstens begründet ist, nicht zuschreiben können, ohne jene Größe selbst zu negieren, so ist die Erklärung des Begriffs Punkt nur so zu fassen, wie wir angegeben haben, d. h. von unendlich kleinen Dimensionen. Es ist jedoch natürlich und zweckmäßig, daß man diesen Begriff im Anfange der Geometrie nicht aus dem unendlich Kleinen ableitet, daß man sogar es umgeht, dasselbe in Anwendung zu bringen.

Der schlagende Beweis dafür, daß der Punkt wirklich unendlich kleine Ausdehnung z. B. nach der Längenrichtung hat, wird dadurch geliefert, daß durch unendlich Vielfachsetzen desselben wieder das Endliche erreicht wird. In scharfer Unterscheidung zwischen 0 und dem unendlich Kleinen haben wir vor allem folgenden Satz festzuhalten: wie man durch unendliche Theilung eine endliche Größe nie 0 erreichen kann, so erreicht man auch umgekehrt durch unendlich Vielfachsetzen von 0 nie eine endliche Größe. Da nun aber wirklich das Aneinanderreihen einer unendlich großen Zahl von Punkten wieder eine Linie giebt, so ist die Längenausdehnung des Punktes unendlich klein.

Freilich umgeht man gewöhnlich und mit vollem Rechte das Aneinanderreihen unendlich vieler Punkte; man hilft sich auch hier durch ein Bild, wozu die Geometrie so vielfach auffordert; sie ist ja eben durch ihre Anschaulichkeit so sehr geeignet zuerst in das Bereich der Mathematik einzuführen; man läßt den Punkt fortrücken und so die Linie erzeugen. Dies Letztere geschieht aber doch nur dadurch, daß der fortrückende Punkt in jeder Lage fixirt wird, die er im Fortrücken einnimmt. In dieser Operation des Fortrückens eines Punktes erkennen wir demnach weiter nichts, als ein Aneinanderreihen unendlich vieler Punkte; weil dieselben wirkliche Längenausdehnung erzeugen, so folgt, daß der Punkt unendlich kleine Ausdehnung hat und daß

dadurch, daß eine Linie in unendlich viel Theile zerlegt ist, wieder der Punkt erhalten werden muß. Die wirkliche Existenz des Punktes trotzdem, daß derselbe den Zahlenwerth 0 der Linie gegenüber repräsentirt, beweist, daß man von einer Existenz im Nullpunkte in scharfer Unterscheidung von der Nichtexistenz wirklich reden darf.

Wir haben absichtlich die übrigen einfachen mathematischen Kategorien ähnlicher Natur, Linie und Fläche, nicht in Betracht gezogen. Diese geometrischen Beispiele allein sind es, die uns die unendlich kleine Größe zur Anschauung bringen; in allen übrigen Fällen ist es uns unmöglich, das unendlich Kleine anders, als rein theoretisch in seiner Nothwendigkeit zu fassen. Jedoch haben wir den Beweis, daß das unendlich Kleine für alle Größenarten so existiren kann, wie wir es oben in der Erklärung darstellten, geführt; wir haben nachgewiesen, daß es den Werth 0 hat und dabei doch, als existirend, scharf von der 0, der Nichtexistenz, zu unterscheiden ist.

§. 3.

Das unendlich Große.

Indem wir diesen Unterschied als den Angelpunkt unserer ferneren Untersuchung betrachten, gehen wir auf das unendlich Große über, um an diesem nachzuweisen, daß das Unendliche begrenzt ist und daß es in Folge davon auch genau numerisch vergleichbare Werthe annehmen darf.

Gewöhnlich stellt man das unendlich Große ∞ durch $a:0$ dar; es ist lehrreich zunächst die Aufgabe $a:0$ im Gegensatze zu $a:dx$ ins Auge zu fassen. Daß das Resultat nicht ∞ sein kann, folgt von selbst schon daraus, daß $0 \,.\, \infty$ nie eine endliche Größe geben kann, sondern wieder nur 0 (s. §. 2). In der Praxis finden sich oft Fälle, daß eine Division durch 0 gefordert wird; ein genaueres Eingehen lehrt hier leicht 0 von dem unendlich Kleinen, das sich unter diesem Bilde zuweilen darstellt, zu unterscheiden; ja, man darf dreist behaupten, daß man zur Division durch 0 nur so hingeführt wird, daß sich der falsche Weg muß nachweisen lassen. Dagegen tritt uns das unendlich Kleine unter dem Bilde 0 entgegen, wenn man auf

die Forderung der Formel $\frac{0}{0}$ einen bestimmten Werth beizulegen ohne Fehlschluß hingeleitet ist. Das einfachste Beispiel für diese Forderung giebt die Aufgabe, die geometrische Reihe $1+e+e^2\ldots+e^{n-1}$ zu summiren, wenn $e=1$; die Summenformel giebt nämlich $\frac{e^n-1}{e-1}=\frac{0}{0}$; da wir jedoch hier $1=1+dx$ setzen dürfen, so daß factische Verschiedenheit der Glieder $1, e, e^2$. angedeutet wird; so erhalten wir aus der obigen Summenformel $\frac{(1+dx)^n-1}{dx}$, eine Größe, der ein wirklicher numerischer Werth beigelegt werden kann.

Man darf sich nicht durch den Anschein täuschen lassen, als ob a durch 0 oder $1-1$ dividiert, weil man über das Endliche hinaus fortoperieren kann, ohne daß die Werthe sich ändern, wie dies ähnlich beim Unendlichen der Fall ist, das Unendliche geben könnte. Denn selbst wenn man unendlich mal 0 gesetzt hat, so hat sich der Werth von a noch nicht im geringsten durch die successive Subtraction von 0 geändert; ja dies kann selbst ins Endlose hinein nie geschehen, weswegen man sagen darf, daß man auch umgekehrt 0 nie durch endlose Theilung einer endlichen Größe erreichen kann. Da dieser Umstand, daß der Werth nicht erreicht wird, gerade mit dem Character des Endlosen übereinstimmt, darf man vielleicht 0 das endlos Kleine nennen.

Schon der Umstand, daß es doch ebenso nahe liegt $a:0$ gleich $-\infty$, als $=+\infty$ zu setzen, hätte vor dieser Aufgabe warnen sollen; das unendlich Kleine kann umgekehrt ebenso gut in den Werthen $-dx$ und $+dx$ unterschieden werden, als $-\infty$ und $+\infty$.

Wir mußten dies voraufschicken, um die Sätze, die wir beweisen wollen, an einem geometrischen Beispiele hinreichend allgemein darzulegen, nämlich an der Tangente. Mit diesem Namen bezeichnen wir die Linie, die durch den Berührungspunkt einerseits, durch den Schneidepunkt der Tangente und Secante andererseits begrenzt ist. Hiernach setzen wir erstens, daß es tang 90° überall nicht geben kann; wirklich sind Tangente und Secante bis ins Endlose nach beiden Seiten, näm=

lich nach oben und nach unten, einander parallel und schneiden sich auch in endloser Entfernung nicht. Dies folgt nicht allein aus der Natur der Parallellinien, sondern auch daraus, daß die trigonometrische Formel für die Tangente $\frac{1}{0} = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$ nach dem vorigen kein Resultat haben kann.

Im Gegensatze zu dieser Endlosigkeit der tang 90° setzen wir zweitens: die unendlich große tang $(90 - dx)^\circ$ hat einen begrenzten Werth. Natürlich fällt in der Zeichnung 90° und $(90 - dx)^\circ$ genau zusammen und nach unserer theoretischen Unterscheidung braucht darum der Satz, daß tang $90^\circ = \infty$ nicht modificirt zu werden, weil der Unterschied nur dann in Betracht kommt, wenn das unendlich Kleine ins Auge gefaßt wird. Wir haben hier noch Folgendes jedoch voraufzuschicken. Wenn nämlich oben gesetzt ist, daß das unendlich Kleine neben dem Endlichen den Werth 0 hat, daß also zwei nur um das unendlich Kleine verschiedene Größen genau einander gleich sind, so dürfte hier unsere Auseinandersetzung angefochten werden, weil wir 90° und $(90^\circ - dx)^\circ$ zu unterscheiden wagen. Daß hier das unendlich Kleine neben dem endlichen Werthe 90° in Betracht gezogen wird, ist aber nur scheinbar; wir gehen hier von dem vollständigen Parallelismus zweier Linien aus und verschieben nun die eine, die Secante, um den unendlich kleinen Winkel dx, wonach dieser mit seinem absoluten Werthe, nicht mit dem relativen Nullwerthe in Frage kommt.

Diese Verschiebung der Secante um einen unendlich kleinen Winkel müssen wir uns folgendermaßen darstellen: Mißt man den Winkel an dem endlichen Kreise, an den die Tangente gelegt ist, so verlegen wir die Secante von 90° durch den ihr zunächst liegenden Punkt nach der Seite hinüber, nach welcher der Winkel abnimmt, um die Secante von $(90 - dx)^\circ$ darzustellen. Natürlich fallen die beiden Punkte zusammen, weil stets zwei Punkte dem Endlichen gegenüber sich als einen Punkt darstellen; auch die Linien fallen in jeder endlichen Entfernung völlig zusammen; weil die Linien aber der Annahme nach einen unendlich kleinen Winkel einschließen, so schneiden sich beide genau genommen, d. h. wenn das unendlich Kleine in Betracht gezogen wird, nur in einem Punkte, dem Scheitelpunkte des

Winkels; für diesen allein ist die Entfernung der Linien = 0, in jedem anderen Punkte unendlich klein.

Wenn der Halbmesser des Kreises, der den Winkel mißt, während der Kreis, an den die Tangente gelegt ist, unverändert bleibt, unendlich groß genommen wird, so wird dadurch der Bogen, durch den der unendlich kleine Winkel gemessen wird, nach der Definition des unendlich Kleinen endlich, weil $\infty . dx = a$. Während also die Linien in jeder endlichen Entfernung zusammenfallen, sind sie demnach in dieser unendlichen Entfernung aus einander getreten. Es ergiebt sich daraus unwiderleglich, daß diese jetzt nicht mehr mit der Parallellinie der Tangente zusammenfallende Secante die Tangente schneiden muß; mag man darum sich das Unendliche vorstellen, wie man will, das Endlose kann es nicht sein, weil durch diesen Schneidepunkt der Werth der unendlich großen Tangente entschieden begrenzt ist.

Man könnte hiergegen einwerfen, daß auch hier die beiden sich schneidenden Linien weniger in einem Punkte sich schneiden, als in jeder endlichen Entfernung zusammenfallen. Abgesehen jedoch davon, daß jeder endliche Werth neben dem Unendlichen den relativen Werth 0 annimmt, wodurch dieser Umstand, daß beide Linien zusammenfallen, schon gleichgültig wird, tritt hier derselbe Fall ein, wie beim Anfangspunkte der Tangente: nur in dem e i n e n Schneidepunkt ist die Entfernung der zusammenfallenden Linien = 0, in allen anderen Punkten ist sie unendlich klein, so daß selbst auf solche Linien, die einen unendlich kleinen Winkel bilden, der Satz, daß zwei Linien sich nur in einem Punkte schneiden, vollkommen anwendbar ist.

So beweist uns dies Beispiel, wie es nach den Einleitungssätzen dieses Paragraphen sein mußte, wirklich, daß das unendlich Große einen b e g r e n z t e n Werth haben muß und dieses stimmt trefflich mit dem in §. 1 bemerkten. Aus dieser Begrenzung läßt sich dann weiter unmittelbar der Beweis führen, daß das unendlich Große wirklich genau durch numerische Verhältnisse mit anderen unendlich großen Werthen verglichen werden kann. Wir haben hier jedoch, ehe wir auf die näheren Nachweisungen eingehen, zweierlei Vergleichungsarten unendlicher Größen von einander genau zu unterscheiden, welche in den

folgenden Untersuchungen ganz besonders von Wichtigkeit sind man vergleicht nämlich entweder die unendlichen Größen unmittelbar in ihren verschiedenen unendlichen Werthen (z. B. in unserem Falle der verschiedenen unendlichen Länge der Linien) oder man zieht nur die mit unendlichen Werthen verbundenen endlichen Factoren in Betracht. Letzteres geschieht gewöhnlich wenn man sich klar machen will, daß Verschiedenheit der unendlichen Werthe wirklich möglich ist; darum wollen wir dies zunächst ins Auge fassen, um desto genauer den ersten Fall davon unterscheiden zu können.

Denkt man sich eine von zwei parallelen, einen Fuß entfernten, unendlich großen Linien begrenzte Ebene und legt eine zweite ihr congruente so daneben, daß der Abstand der Parallelen nun zwei Fuß beträgt, so ist diese Ebene genau doppelt so groß als die erste. Hier vergleicht man ohne Berücksichtigung der möglichen Verschiedenheit der unendlichen Werthe nur die endlichen Größen, die mit dem Unendlichen verbunden erscheinen. Um andererseits die Verschiedenheit der unendlichen Größen an sich nachzuweisen, gehen wir auf das oben benutzte Beispiel der Tangente von $(90 - dx)^{\circ}$ zurück.

Denken wir uns verschiedene concentrische Kreise mit den Halbmessern 1, 2, 3 . . . gezogen und verzeichnen an denselben die Tangenten von $(90 - dx)^{\circ}$, so müssen sich die Größen dieser unendlich großen Tangenten bezüglich, wie die Halbmesser der Kreise verhalten, an welche sie gezogen sind. Dies ergiebt sich daraus, daß Tangente, Secante und Halbmesser Dreiecke bilden, weil sich Tangente und Secante schneiden müssen; diese Dreiecke geben schon wegen ihrer Aehnlichkeit das verlangte Resultat; man kann den Satz jedoch noch deutlicher durch Nachweis der Congruenz der Dreiecke beweisen, die sich leicht bilden lassen, wenn man von den Schneidepunkten der Tangente und Secante auf die folgenden Tangenten Lothe fällt.

Dieser äußerst wichtige Satz, daß ∞ nicht $= 2\,\infty$ rc. ist, giebt uns nicht allein das deutlichste Bild von den Eigenschaften des Unendlichen, sondern ist auch in Folgendem so sehr Mittelpunkt unserer Untersuchung, daß es wohl werth ist, daß an einem zweiten Beispiele seine Richtigkeit nachgewiesen werde. Daraus, daß wir uns hier, wo es gilt, die Eigenschaften des

Unendlichen nachzuweisen, an Beispiele halten, kann uns kein Vorwurf gemacht werden, weil es ja überall unser Zweck ist, diese Eigenschaften a posteriori zu construieren.

Das folgende Zahlenbeispiel beweist zugleich unmittelbar, daß ebenso, wie das unendlich Große verschiedene Werthe annehmen kann, dieses auch beim unendlich Kleinen möglich ist, was freilich leicht eins aus dem andern geschlossen werden kann. Setzt man nämlich

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots \text{in inf.} = 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} \ldots \text{in inf.}\right)$$

so erhält man durch Transponieren der rechten Seite dieser Gleichung nicht etwa

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots\ldots = 0;$$

denn mag sieht ja leicht, da je zwei Glieder der linken Seite stets eine positive Differenz haben müssen. Der Grund, daß die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$ nicht $= 0$ wird, liegt darin, daß ∞ nicht $= 2\,\infty$, daß also von der rechten Seite der ursprünglichen Gleichung nicht alle Glieder transponiert sind, um die neue Reihe zu bilden, sondern nur die Hälfte der Glieder bis $\frac{2}{\infty}$; die zweite Hälfte von $\frac{2}{\infty}$ bis $\frac{2}{2\infty}$ muß der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$ gleich sein.

Daß dies wirklich der Fall ist, läßt sich leicht beweisen, und wir fügen diesen Beweis hier um so lieber bei, als nicht nur späterhin uns Rückschlüsse auf die hier angewandten Sätze freistehen, sondern auch, weil sich ein besonders deutliches Beispiel unmittelbarer Integration uns hier darbietet. Bekannt ist nämlich, daß die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots = \log 2.$$

Wir dürfen also auch die unendlich große Zahl von unendlich kleinen Werthen, d. h.

$$2\left(\frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+4} + \frac{1}{\infty+6} \ldots\ldots + \frac{1}{2\infty}\right) = \log 2$$

setzen; oder weil wir stets

$$2\left(\frac{1}{\infty+2}\right) = \frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{\infty+2}$$

setzen dürfen, da beide Werthe nur um $\frac{1}{\infty.\infty}$ unterschieden

sind, also die ganze Reihe nach ihrer Summirung nur um $\frac{}{\infty}$

$$\frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+3} \ldots + \frac{1}{2\infty} = \log 2.$$

Wenn wir durch $\frac{1}{\infty}$ dividieren und mit $dx = \frac{1}{\infty}$ multipl cieren, so erhalten wir

$$dx\left(\frac{1}{1+dx} + \frac{1}{1+2\,dx} + \frac{1}{1+3\,dx} \ldots + \tfrac{1}{2}\right) = \log$$

Bekanntlich ist aber $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$ und $\log 1 = 0$.

Wie wir schon angedeutet haben, ergiebt sich aus diese Beispielen nothwendig eine mögliche Verschiedenheit des Unend lichen unter sich, das wir doch wieder nur durch denselbe Namen unendlich stets zu bezeichnen haben. So durchläuft auc das unendlich Kleine die verschiedensten Werthe; während da Tausendfache desselben, ja seine tausendste Wurzel stets noc unendlich klein ist, kann es auch vorkommen, daß der unendlic kleine Theil einer unendlich kleinen Größe noch gefordert werden kann, den wir doch wieder eben nur unendlich klein benennen dürfen.

Um auch ein geometrisches Beispiel anzufügen, wonach sich die Verschiedenheit unendlich kleiner Größen und ihre Vergleichbarkeit durch Zahlenverhältnisse veranschaulichen läßt, theilen wir concentrische Kreislinien, deren Halbmesser sich wie 1:2:3... verhalten, in unendlich kleine Theile; diese verhalten sich selbstverständlich, wie die bezüglichen Halbmesser. Ja, beschreibt man im Mittelpunkte einen Kreis mit unendlich kleinem Halbmesser, so ist der Werth eines unendlich kleinen Theils desselben unendlich Mal kleiner als der entsprechende Werth bei Kreisen, die mit endlichen Halbmessern beschrieben sind. Daß dies wirklich der Fall ist, wird dadurch bewiesen, daß man die unendlich kleinen Theile, in welche ein Kreis durch Radien zerlegt wird, als Dreiecke auffassen muß.

§. 4.

Ueber die Rechnung mit dem unendlich Kleinen im Allgemeinen.

Nachdem wir so die Haupteigenschaften der unendlichen Größen dargethan haben, gehen wir zum zweiten Haupttheil

unserer Untersuchung über, zu den Rechnungen mit dem unendlich Kleinen; wir können nun nachweisen, welchen Modificationen diese unterliegen und wann sie überhaupt möglich sind.

Alles Rechnen soll in der Regel auf bestimmte, endliche Zahlenverhältnisse zurückführen; nur ausnahmsweise giebt es uns unendliche Resultate. Wenn wir mit unendlichen Größen zu rechnen haben, so muß bei diesen zunächst die Möglichkeit, daß bestimmte endliche Resultate sich ergeben können, nachgewiesen werden; und von diesem Gesichtspunkte aus können wir nur zwei Rechnungsoperationen als allgemein möglich in Betracht ziehen; ein endliches Resultat erreichen wir nach dem oben Gesagten nur entweder durch Multiplication einer unendlich kleinen Größe durch eine unendlich große Zahl oder durch Division zweier unendlich kleiner Größen. Daß gerade nur diese beiden Rechnungsoperationen möglich sind, ergiebt sich unmittelbar daraus, daß das unendlich Kleine und Große nur durch multiplicative Rechnungsoperationen aus dem Endlichen erhalten und umgekehrt darauf zurückgeführt wird. Freilich könnte auch Wurzelausziehung, Logarithmenrechnung 2c. auf das unendlich Kleine hinleiten; daß man aber doch stets strebt das unendlich Kleine durch unendliche Theilung allein zu erreichen und daß es keine dritte Operation giebt, endliche Resultate aus unendlichen Werthen zu erreichen, ergiebt sich leicht aus folgenden, in den Eigenschaften des Unendlichen basierenden Beschränkungen der Rechnung mit unendlichen Größen.

1) Das unendlich Kleine hat nach §. 3 ebenso wie das unendlich Große, das stets daneben als Zahl der Theile sich ergiebt, verschiedene absolute Werthe; und doch haben wir, da alles Unendliche sich unserer Anschauung entzieht, für diese verschiedenen Werthe stets nur eine Bezeichnung und sind überall nicht im Stande, zwei beliebig verschiedene Werthe mit einander zu vergleichen. Theilt man zwei verschiedene Größen unabhängig von einander in unendlich kleine Theile, so lassen diese nie eine Vergleichung unter einander zu. Eine solche ist allein dann denkbar, wenn entweder die unendlich kleinen Theile einer Größe in Betracht gezogen werden oder wenn zwei verschiedene Größen bis ins Unendliche hinein durch identische Operationen neben einander in unendlich kleine Theile zerlegt sind.

2) Da das unendlich Kleine neben dem Endlichen, die| neben dem unendlich Großen den relativen Werth 0 hat, darf man im Allgemeinen — wie schon im vorigen §. ang deutet ist — nie das unendlich Kleine neben einem endlich Werthe in Betracht ziehen und muß daher stets das unendli Kleine für sich allein betrachten.

Natürlich ist dies nicht so zu verstehen, als wenn es nic möglich wäre das unendlich Kleine neben der endlichen Grö überall zu erfassen, denn wenn eine Größe um endliche Theile z wachsen strebt, so kann man diese endlichen Theile bis ins Un endliche kleiner und kleiner werden lassen, jedoch stets nur so daß diese Trennung der endlichen und unendlich kleinen Größe auch in diesem Falle wirklich vor sich geht. Die Haupt wirkung einer völligen Trennung, wornach man allein die un endlich kleinen Größen in die Rechnung hineinzieht, ist die, da in diesem Falle der absolute Werth des Unendlichen in Betrach gezogen werden kann und daß das unendlich Kleine genau sich verhält wie das endlich Kleine, natürlich stets unter Berücksichtigung seines Nullwerthes dem Endlichen gegenüber; und jede Rechnung mit dem unendlich Kleinen muß sich um für uns anschaulich werden zu können unter dem Bilde einer Rechnung mit endlichen Größen darstellen lassen.

Folgende beiden Sätze erlauben nun in den Rechnungsoperationen mit dem unendlich Kleinen dieses uns unter dem Bilde einer endlichen Größe vorzustellen, weil sie beweisen, daß wirklich auch die unendlichen Größen bestimmten Gesetzen in der Weise unterworfen sind, daß sie genau wie endliche Größen, bestimmte numerische Werthe durch Vergleichung mit einander ergeben:

I. Da wir in allen Fällen uns das unendlich Kleine so vorstellen, daß wir das Endliche kleiner und kleiner werden lassen, bis der Nullwerth erreicht ist, so drücken wir den ersten Satz, um diesen Zusammenhang zwischen den endlichen und unendlich kleinen Theilen stets im Auge zu behalten, so aus:

Wenn zwei gleiche Größen bis ins Unendliche hinein denselben multiplicativen Operationen gleichmäßig unterliegen, so bleiben sie auch bis ins Unendliche hinein einander gleich.

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem oben gegebenen Satze, daß $0 . \infty = 0$ ist; weil wir nämlich $0 = 1 - 1$ setzen dürfen, so folgt daraus, daß $(1 - 1) \infty = \infty - \infty = 0$; selbstverständlich darf man übrigens hier auch ohne den Satz zu ändern statt 0 das unendlich Kleine setzen; wenn man daraus folgert, daß $\infty - \infty = a$ ist, so drückt dies ja ganz dasselbe aus, da dem unendlich Großen gegenüber das Endliche $= 0$ ist; es folgt daraus, daß wir das unendlich Große, daß ja nach den obigen Bemerkungen endlos viel Werthe hat, dann einander genau gleich setzen dürfen, wenn man neben einander die endlichen Werthe, die es um zum Unendlichen zu gelangen durchläuft, einander gleich setzen muß: dies gewährt die einzige Möglichkeit gleiche unendlich große Werthe darzustellen, da es wegen der Unanschaulichkeit dieses Begriffs, der auch darin seinen Ausdruck findet, daß alle unendlichen Werthe nur durch das eine Zeichen ∞ ausgedrückt werden müssen, und wegen dem schon eben behaupteten Schwanken seines Werthes, da immer sowohl $\sqrt[a]{\infty}$, als auch ∞^a noch unendlich groß ist, unmöglich ist durch unmittelbare Operationen gleiche unendlich große Werthe zu erreichen.

Was hier vom unendlich Großen behauptet ist, gilt auch vom unendlich Kleinen, dem umgekehrten Werthe des ersteren, da zwischen beiden stets der Zusammenhang stattfindet, daß der Werth des unendlich Kleinen abhängig ist von der unendlich großen Zahl der Theile, in welche eine endliche Größe zerlegt ist.

II. Zwei verschiedene endliche Größen, die in einem bestimmten Zahlenverhältnisse zu einander stehen, behalten genau dieses selbe Verhältniß, wenn man sie durch identische multiplicative Rechnungsoperationen unendlich groß oder unendlich klein werden läßt. Nach dem ersten Satze ergiebt sich nicht nur dann, wenn das Zahlenverhältniß rational ist, sondern sogar dann, wenn es irrational ist, der Beweis unmittelbar; aus diesem Satze ergiebt sich zugleich auch der directe Beweis des Satzes, daß zwei Größen, deren rationale Werthe stets proportional sind, auch in ihren irrationalen Werthen diese Proportionalität beibehalten.

§. 5.

Die erste Rechnungsoperation mit dem unendlich Kleinen.

Diese beiden eben genannten Sätze müssen die Grundlage aller Rechnungsoperationen mit unendlichen Größen bilden; es folgt daraus, daß solche Rechnungsoperationen nur da zulässig sind, wo man zwei Größen neben oder gewöhnlicher in einander identischen Operationen unterworfen hat; meistens zieht man, wie schon oben bemerkt ist, nur innerhalb ein und derselben Größe die Werthe des unendlich Kleinen und unendlich Großen in Betracht. Die unendlich kleinen Theile endlicher Größen, welche wir bisjetzt untersucht haben, welche nämlich dadurch erreicht sind, daß eine Größe in gleiche endliche Theile, und diese wieder in gleiche Theile bis ins Unendliche zerlegt sind, müssen natürlich stets einander gleich sein; die unendlich große Zahl jener Theile steht ferner zu einem derselben in dem Verhältnisse, daß beide mit einander multipliciert die ursprüngliche Größe ergeben; sie verhalten sich demnach genau so, wie die Zahl der endlichen gleichen Theile zu einem derselben. Mit Hülfe des zweiten Lehrsatzes des vorigen §. erweitern wir diesen Satz dahin:

> Das Product aus einem unendlich kleinen Theil einer Größe, die bis ins Unendliche in lauter gleiche Theile zerlegt ist, in eine unendlich große Zahl giebt stets genau den Zahlenwerth, den die endlichen Theile multipliciert mit der der unendlich großen Zahl entsprechenden endlichen Zahl ergeben, wenn man in beiden Fällen das Unendliche aus dem Endlichen erwachsen läßt.

In den meisten Fällen vereinfacht sich diese Rechnung dahin: die unendlich große Zahl der unendlich kleinen Theile verhält sich in den verschiedenen endlichen Theilen der ursprünglichen Größe stets, wie die Theile selbst, so daß also auch hier zum Behuf der Rechnung die unendlichen Größen ohne Schaden durch endliche ersetzt werden dürfen. Für diesen zweiten Ausdruck des Satzes ergeben sich in allen Integrationen Beispiele; hier mag nun vorläufig erinnert werden an die Art, wie man den Werth eines Kreises oder Kreisausschnitts aus dem Umfange bestimmt. Um den Hauptsatz zu erläutern, müssen wir folgendes Beispiel

mit um so größerm Rechte anfügen, weil es auf den ersten Blick nicht unter diese Rechnungsoperation zu fallen scheint.

Die Formel $(1 + dx)^\infty$ giebt einen endlichen genau bestimmbaren Zahlenwerth, freilich nur in dem Falle, daß das Verhältniß zwischen dem unendlich kleinen Theile dx und der Zahl ∞ genau bestimmt ist. Um nachzuweisen, unter welchen Bedingungen dies Verhältniß überall bestimmbar ist, wollen wir ein genau specialisiertes Beispiel betrachten. Steht ein Capital zu fünf Procenten so auf Zinsen, daß es in jedem Augenblicke Zinsen trägt, die gleich zum Capital geschlagen werden, so werden wir in unserer Rechnung folgendermaßen verfahren müssen. Die jährlichen Zinsen zu 5 Procent machen den zwanzigsten Theil des Capitals aus; zerlegt man nun gleichmäßig diese Zinsen und den Zeitraum eines Jahres in unendlich kleine Theile, so ist der unendlich kleine Theil der Zinsen = dem zwanzigsten Theil des unendlich kleinen Theils, den man erhält, wenn man das Capital in die unendlich große Zahl von Theilen zerfällt, in die man das Jahr getheilt hat. Nennt man also die Zahl der Theile des Jahrs ∞ so erhalten wir für ein Jahr

$$\left(1 + \frac{1}{20\,\infty}\right)^\infty.$$

Unserm Satze gemäß entwickeln wir diesen Ausdruck zu folgender Formel, indem wir die Potentüerung auf Multiplication innerhalb einer unendlichen Reihe zurückführen

$$1 + \tfrac{1}{20} + \frac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{20}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\cdot\left(\tfrac{1}{20}\right)^3 \ldots\ldots = e^{\frac{1}{20}};$$

für zwanzig Jahre erhalten wir

$$\left(1 + \frac{1}{20\,\infty}\right)^{20\,\infty} = e.$$

Also erst in zwanzig Jahren erwächst ein solches Capital zum e fachen Werthe. Die Richtigkeit dieser Behauptungen läßt sich leicht controlieren, wenn man das endlich Kleine an die Stelle des unendlich Kleinen setzt. Es folgt daraus, daß bei stetigem, gleichmäßigem Wachsthum sich die Logarithmen der Capitalien — oder ähnlicher Größen — wie die Zeiten verhalten.

Wir haben demnach diese Aufgabe $(1 + dx)^\infty$ deßhalb, weil sie stets nur darauf hinleitet, unendlich große und unend=

lich kleine Werthe so mit einander zu multiplicieren, daß sich endliche bestimmte Zahlenwerthe ergeben, unter unsere erste Rechnungsoperation zu subsummieren; wir müssen dies besonders hervorheben, weil wir zugleich nachzuweisen haben, daß neben den beiden von uns aufgestellten Rechnungsoperationen keine dritte in allgemeiner Gültigkeit existieren kann.

§. 6.

Die zweite Rechnungsoperation mit dem unendlich Kleinen.

Außer der Rechnung, welche wir im vorigen §. beleuchtet haben, wonach aus der Multiplication des unendlich Kleinen mit einer unendlich großen Zahl dann ein endliches nummerisches Resultat sich ergeben mußte, wenn eine unmittelbare Vergleichung beider Werthe möglich ist, giebt nach dem obigen nur noch Division zweier unendlich kleiner Größen ein solch endliches Resultat; aus §. 3 folgt, daß eine solche Vergleichung bei unendlich großen Werthen, demnach auch bei unendlich kleinen, auf doppelte Weise erhalten werden kann:

1) ein unendlich kleiner Theil kann weiter in eine beliebige Zahl von Theilen zerlegt werden und einer dieser neuen Theile wird mit dem erstern verglichen. Auf die Möglichkeit dieser Vergleichung mußten wir oben großes Gewicht legen, um nachweisen zu können, welchen Einschränkungen die Rechnungen mit unendlichen Größen unterliegen; von weiterer practischer Bedeutung ist dieser Punkt keineswegs, da stets daran festgehalten werden muß, daß das Reich der unendlichen Größen unendlich mannigfaltig ist und daß selbst bei bestimmter Anwendung nie der absolute Werth des unendlich Kleinen so festgehalten werden kann, daß gesagt werden dürfte: bis hierher soll getheilt werden und nicht darüber hinaus; dazu kommt noch, daß man nur da zu der Rechnung mit dem unendlich Kleinen übergehen wird, wo die Rechnung mit endlichen Größen nicht ausreicht; und es macht in diesem Falle keinen Unterschied, ob man die endlichen oder die unendlich kleinen Theile berücksichtigt.

2) Eine unendlich kleine Größe kann mit einem endlichen Faktor multipliciert sein: hierdurch wird eine zweite unendlich

kleine Größe gebildet, welche durch die erstere dividiert wieder den endlichen Faktor als Resultat ergiebt. Hierauf basiert die zweite Rechnungsoperation mit dem unendlich Kleinen, die Differentialrechnung.

Es ist nothwendig diese beiden Fälle genau auseinander zu halten; freilich macht uns diese Unterscheidung darum leicht einige Schwierigkeit, weil wir gewohnt sind, in jedem Falle den Werth einer Größe auf einen Zahlenausdruck zu reducieren und nach diesem die Werthe verschiedener Größen zu vergleichen. In beiden Fällen, wo zwei unendlich kleine Größen in Vergleich gezogen werden, ist der absolute Zahlenausdruck eigentlich stets derselbe; ob wir annehmen, daß das unendlich Kleine doppelt so groß ist, als der neue durch Division mit 2 erhaltene unendlich kleine Theil, oder daß das mit dem Faktor 2 multiplicierte unendlich Kleine doppelt so groß ist, als das einfache, scheint, weil wir beides auf denselben Zahlenausdruck zurückführen, völlig zusammen zu fallen. Aus folgenden Betrachtungen wird der Unterschied in seiner Nothwendigkeit klarer hervortreten.

Der Zweck der Mathematik ist sich das Unbekannte bekannt zu machen durch Vergleichung mit bekannten Größen. Diese Vergleichung geschieht unmittelbar durch Messen, mittelbar durch Berechnung, stets durch einen Zahlenausdruck. Wenn man zuerst das Gebiet der Mathematik betritt, so müssen stets einige Arten von Größen schon bekannt sein um die übrigen auf sie zurückführen zu können und diese müssen zu den meßbaren Größen gehören, deren Zahl beschränkt ist. Denn nur die Größen sind meßbar, deren gleiche Theile unter jeder Bedingung einander congruent sein müssen; so unter den geometrischen nur Linie und Winkel. Auf diese meßbaren Größen führt man natürlich die andern nicht meßbaren am liebsten zurück; zuweilen tritt auch wohl der umgekehrte Fall ein, der hier um so weniger in Betracht gezogen zu werden braucht, weil man doch zuerst den oben angezeigten Weg in jedem Falle eingeschlagen haben muß, um den Zahlenausdruck für die nicht meßbaren Größen zu finden. Die einfachste Art der zusammengesetzten Größen, die zu berechnen sind, ist die, deren Ausdruck durch Multiplication der Maßgrößen gegeben wird. Denn da

diese Größen mittelbar in congruente Theile sich zerlegen lassen — in der Geometrie die Flächen geradlinig begrenzter Figuren, ebenso Cubikinhalt der Prismen, Pyramiden 2c., — so können sie wieder als Maßgrößen für eine andere Classe zusammengesetzter Größen dienen.

Diejenigen Größen, bei welchen eine Zerlegung in solche congruente Theile überall unmöglich ist, haben die Beschaffenheit, daß nur ihre unendlich kleinen Theile mit den Maßgrößen der ersten oder der zweiten Art verglichen werden können, da sie sich innerhalb der unendlich kleinen Theile stetig verändern. Eine von einer Curve begrenzte Ebene kann nur dadurch in Parallelogramme, d. h. in Theile, die mit der Maßgröße, dem Quadrate, vergleichbar sind, zerlegt werden, daß man sie in unendlich kleine Theile zerfällt. Während also die Multiplication die Rechnungsart ist, welche die zusammengesetzten Maßgrößen aus den einfachen herleitet, führt jede andre Rechnungsform, Potentiierung, Logarithmen, Sinus, Cosinus 2c. uns auf Größen der letzten Art, welche nur durch Zerlegung in unendlich kleine Theile überall berechenbar sind. Aus den Eigenschaften des Begriffs des unendlich Kleinen, die wir oben entwickelt haben, folgt, daß sie stets so müssen dargestellt werden können, daß die Maßgröße mit gewissen Factoren multipliciert wird; sie basieren alle im allgemeinen auf einer Potenz der Maßgröße.

Ist eine Größe gegeben, deren Zahlenausdruck durch irgend eine dieser Rechnungsformen auf eine Maßgröße bezogen ist, so darf man durch Zerlegung der Maßgröße in unendlich viel gleiche Theile die zusammengesetzte Größe in genau ebenso viel ungleiche Theile zerlegen. Nach §. 4. 2. muß man diese unendlich kleinen Theile um ihren absoluten Werth in Rechnung bringen zu können, von den endlichen Theilen der Größe trennen. Dividiert man nun den unendlich kleinen Theil der zusammengesetzten Größe durch den entsprechenden Theil der Maßgröße, so erhält man einen Zahlenausdruck, der auf eine Maßgröße niedrigerer Ordnung, als die Hauptgröße, zurückleitet, wenn man in diesen Maßgrößen die Ordnung nach der Zahl der Faktoren bestimmt; also auf eine solche, welche einen Faktor weniger enthält.

Ist z. B. als einfachster Fall die Potenz x^n gegeben, die einer krummlinig begrenzten Fläche angehören möge, so ist, falls n größer als 2 oder überall davon verschieden ist, in diesem Ausdruck der Werth der Linie x und der Zahlenwerth derselben identificiert, wie dies bei Zahl und Größe stets geschehen kann.

Zerlegt man die Figur durch parallele Ordinaten in unendlich kleine Theile, so erhält man Parallelogramme von stetig verschiedener Höhe und unendlich kleiner Grundlinie; der Werth eines Parallelogramms durch die Grundlinie dividiert giebt genau die Höhe, diese stellt sich der unter der Formel x^{n-1} dar, wenn wir den hier völlig gleichgültigen Coeffitienten n aus dem Spiele lassen. Der Differentialquotient dieser Linie, der unter die Formel x^{n-2} fallen wird, ist eine unbenannte Zahl, der Differentialquotient dieser Zahl ist eine unbenannte Zahl dividiert durch eine Linie; und so kann man fortrechnen, bis die Zahl der n Faktoren völlig erschöpft ist. Dies ist es, was wir mit dem Ausdruck: Maßgrößen niedrigerer Ordnung bezeichnen wollten.

Die Möglichkeit, daß beide unendlich kleinen Größen trotz ihres Werthes $= 0$ doch in genau numerischem Verhältniß zu einander stehen können, bedarf nach dem obigen keines weitern Beweises; denn einerseits darf man nicht übersehen, daß dem absoluten Nichts, der 0, gegenüber das unendlich Kleine als eine wirkliche Größe seinen genauen absoluten Werth hat und daß also wohl die Division zweier unendlich kleinen Größen durch einander von der Division $\frac{0}{0}$ zu unterscheiden ist; andererseits fällt die Aufgabe $\frac{dx^1}{dx}$ genau zusammen mit $\infty\, dx$, weil wir das unendlich Große stets als den umgekehrten Werth des unendlich Kleinen dargestellt haben.

Wir haben nur noch eine Bemerkung über den Differentialquotienten hinzuzufügen. Da der Differentialquotient einer Function wieder eine Function ist, so darf diese wieder differentiiert werden; der neue Differentialquotient braucht nun freilich im Allgemeinen nie mit der ursprünglichen Function zusammengestellt zu werden, da er nach den obigen Bemerkungen eine ganz andre Art von Größen geworden ist. Da wir aber einmal

stets darauf geführt werden, zwei Größen, die mit einander verglichen werden sollen, durch einen Zahlenwerth zu vergleichen, so ergiebt sich daraus allerdings, daß der *n*te Differentialquotient einer Function, der dadurch erhalten ist, daß man successive *n* Factoren der Function unendlich klein gemacht hat, ∞^nmal kleiner ist, als der Werth der ursprünglichen Function. Nach unserer Erklärung des unendlich Kleinen kann jedoch hierin nichts befremdendes liegen, das nur dann eintritt, wenn man das Unendliche mit dem Endlosen verwechselt.

Auf die Intregation überzugehn liegt außerhalb unseres Zweckes; es genügt die Bemerkung, daß in derselben die erste unserer Rechnungsoperationen mit der zweiten combiniert werden muß. Unser Zweck ist erreicht mit dem Nachweise, wie die mathematischen Eigenschaften des unendlich Kleinen die Rechnungen mit demselben modificieren und beschränken, und daß nur die genannten Rechnungsoperationen aus dem unendlich Kleinen endliche numerische Resultate ergeben, daß also die Wichtigkeit jener Operationen eben darin liegt, daß sie die einzig möglichen sind.

Schulnachrichten
aus dem Jahre 1858.

1. Lehrer.

Zu Ostern folgte Herr Dr. Armbrust, welcher seit Ostern 1854, zuerst zur Abhaltung des Probejahres, dann als Hülfslehrer mit Geschick, Eifer und bestem Erfolge gewirkt hatte, einer Berufung zum zweiten Lehrer an der hiesigen Stadttöchterschule. Da nun Herr Dr. Guthe die Functionen eines zweiten Lehrers für Mathematik und Naturwissenschaft, in welchen Hr. Dr. Armbrust ihn interimistisch abgelöst hatte, wieder übernahm, so kam das von jenem seit zwei Jahren versehene Ordinariat der Unter-Tertia an Herr Dr. Stisser, das der Quarta an Herr Dr. Müller und die dadurch erledigte Stelle eines Collaborators als Ordinarius der Quinta wurde durch Anstellung des Candidaten für das höhere Schulamt Hr. Mejer besetzt, welcher bereits, wie früher berichtet, im Winterhalbjahre 185⁶/₇ interimistisch am Lyceum thätig gewesen war *). Der

*) Ludwig Christian Mejer, geb. zu Celle den 6. Juni 1825, besuchte von Ostern 1835 bis Michaelis 1844 das dortige Gymnasium und dann bis Michaelis 1848 die Universität Göttingen. Gleich nach Ostern 1849 absolvirte er sein Staatsexamen in den philologischen Wissenschaften und in der Mathematik. Er ging darauf Michaelis 1849 zur practischen Thätigkeit über, indem er sein Probejahr an dem Cellischen Gymnasium bestand und bis Ostern 1851 hier thätig war. Nachdem er inzwischen den größten Theil der folgenden Zeit privatisiert hatte, siedelte er Michaelis 1855 nach Hannover über, wo er von Michaelis 1856 bis Ostern 1857 am Lyceum schon früher beschäftigt war. In Folge des in der Mathematik bestandenen Staatsexamens nahm der-

weitere Verlauf des Schuljahrs 185⁸/₉ ist ohne Störungen des Unterrichtsganges durch Veränderungen im Lehrerpersonale geblieben, ein Glück, das dem Lyceum seit geraumer Zeit nur selten zu Theil geworden ist.

2) Schüler.

Im Jahre 1858 hat die Schülerzahl der ganzen Anstalt und der einzelnen Classen folgende Bewegung erfahren:*)

	VI	V	IV	III^b	III^a	II^b	II^a	I^b	I^a	Summa
Bestand zu Neujahr 1858 . . .	39(1)	42(4)	40(7)	29(8)	20(5)	20(7)	12(6)	14(10)	5(3)	221(51)
Abgang bis Ostern . .	—	2	6	6	3	2	3	—	5	27
Also Rest .	39	40	34	23	17	18	9	14	—	194
oder nach d. Versetzung	5	40	41	29	24	16	16	9	14	194
Zugang zu Ostern . .	42	3	2	2	1	2	—	—	—	52
Also Bestand n. Ostern	47	43	43	31	25	18	16	9	14	246
Abgang bis Neujahr 1859 . . .	1	3	—	2	3	2	—	—	—	11
Zugang bis dahin . . .	2	5	1	3	1	1	—	—	—	13
Also Bestand nach Neujahr 1859	48(3)	45(3)	44(4)	32(10)	23(4)	17(5)	16(5)	9(3)	14(10)	248(47)

---

selbe die lange vernachlässigten mathematischen Studien mit großem Eifer wieder auf; zu gleicher Zeit auch begann er anfangs aus Liebhaberei, bald aber im ernsten Studium sich mit der Botanik zu beschäftigen. Er hat übersetzt „die höhere Mechanik“ von Navier. Hahn 1858.

*) Die in Klammern eingeschlossenen Zahlen beziehen sich auf die auswärtigen Schüler, d. h. die nicht in der Stadt Hannover, den Vorstädten oder Linden einheimischen.

Man ersieht hieraus, daß auch in diesem Jahre die Schülerzahl bedeutend gewachsen ist, welche nach Neujahr 1855 186 Schüler betrug, nach Neujahr 1856 200 Schüler, nach Neujahr 1857 204 Schüler, nach Neujahr 1858 221 Schüler und gegenwärtig 248 Schüler. Diese Vermehrung hat besonders die drei unteren Classen getroffen, und diese sind dadurch jetzt so gefüllt, daß die Aufnahme von Schülern, welche nicht aus der Vorschule aufrücken, fortan schwierig sein wird.

Das **Durchschnittsalter** der Schüler in den einzelnen Classen stellte sich folgendermaßen heraus:

	VI	V	IV	III^b	III^a	II^b	II^a	I^b	I^a
Zu Neujahr 1858	$10\frac{8}{12}$	$11\frac{9}{12}$	$13\frac{2}{12}$	$14\frac{8}{12}$	$15\frac{6}{12}$	$16\frac{8}{12}$	$17\frac{3}{12}$	$18\frac{8}{12}$	$18\frac{6}{12}$
Zu Neujahr 1859	$10\frac{8}{12}$	$11\frac{11}{12}$	$13\frac{2}{12}$	$14\frac{3}{12}$	$15\frac{7}{12}$	$16\frac{5}{12}$	$17\frac{9}{12}$	$18\frac{6}{12}$	$19\frac{8}{12}$

Unter den **abgegangenen** Schülern verließen das Lyceum:

A. mit dem **Zeugniß der Reife** für die Universitätsstudien (sämmtlich zu Ostern)

1) **Rudolf Kühner**, Sohn des Rectors am Lyceum, 19 Jahr alt, 11 Jahr Schüler der Anstalt, um sich der Philologie zu widmen;

2) **Carl Bühler**, Sohn des Predigers zu Altenhagen, 18¼ Jahr alt, 3 Jahr Schüler des Lyceums, um Theologie zu studieren.

3) **Heinrich Philippi**, Sohn des weil. Predigers zu Bevenrode, 18¼ Jahr alt, 8½ Jahr auf dem Lyceum, um Theologie zu studieren.

4) **Leo Schuster**, Sohn des Notars Dr. jur. Schuster zu Ahlden a. d. A., 19 Jahr alt, 5 Jahr Schüler des Lyceums, zum Studium der Theologie.

B. Außerdem aus den oberen Classen:

Aus Ober-Prima (Ost.) **Carl Schmid**, Sohn des Obergerichts-Anwalt zu Mitau in Kurland, 18 Jahr alt, ¾ Jahr Schüler des Lyceums, nachdem er schon die russische Maturitäts-Prüfung mit Ehren bestanden hatte; hinsichtlich des zu erwählenden Studiums war er noch nicht fest entschieden.

Aus **Ober-Secunda** (Ost.) Hermann Huntemüller aus Uslar zur polytechnischen Schule, Philipp Spitta aus Peine auf das Gymnasium zu Celle, Wilhelm Wallmann aus Bordenau zum Forstfache.

Aus **Unter-Secunda** (Ost.) Georg Schuster aus Ahlden a. d. A. auf das Gymnasium zu Lingen, Emil v. Blum aus Hannover zur Cadettenanstalt; (Joh.) Oscar Nassau von hier, um sich zum Bildhauer auszubilden; (Weihn.) Ernst Dammann aus Ilienworth, zunächst ins elterliche Haus zurück.

Unter den 25 aus den mittlern und unteren Classen abgegangenen Schülern, gingen 9 unmittelbar ins bürgerliche Leben über (4 zur Kaufmannschaft, 2 zum Buchhandel, 2 zur Oeconomie, 1 zum Seedienst, 1 zum Canzleidienste), 2 auf Cadettenanstalten, 10 zu andern Schulen (darunter 4 zur höheren Bürgerschule). Bei 5 der abgegangenen war ihre weitere Bestimmung ungewiß; ein hoffnungsvoller Schüler der Quinta wurde, wie schon in den letzten Schulnachrichten berichtet ist, durch den Tod fortgerafft.

3. Unterricht.

Nachdem in den letzten Schulnachrichten eine ausführlichere Uebersicht des festgehaltenen Lehrplans gegeben ist, erscheint es zweckmäßig, dieses Mal anschaulich zu machen, in welcher Weise jener Lehrplan, insoweit es sich nicht von selbst versteht, zur Ausführung kommt. In den wissenschaftlichen Fächern ist es bei den einjährigen Cursen unserer Classen ein für alle Mal bestimmt, was in jedem Schuljahre getrieben wird, und ähnlich verhält es sich in den unteren und zum Theil in den mittleren Klassen auch mit den sprachlichen Fächern. Es kann daher nur von Interesse sein, hinsichtlich des sprachlichen Unterrichts in den oberen und theilweise den mittleren Classen eine Uebersicht zu geben, wie die Schüler in dem verflossenen Schuljahre beschäftigt sind, namentlich was sie in der Schule gelesen und welche Themata sie in den freien deutschen und lateinischen Aufsätzen bearbeitet haben.

1. Deutsch.

A. In der vereinigten Prima (3 Stunden wöchentlich. Wiedasch) wurden folgende Themen bearbeitet:

I. 1) Das national-deutsche Element in Goethe's Dichtungen. (nämlich in Götz von Berlichingen, Egmont, Faust, den Liedern oder in einer dieser Dichtungen insbesondere.) Ia.

2) Goethe's Iphigenie in ihren Grundzügen eine christlich-germanische Dichtung. Ia.

3) Hector's Abschied bei Homer und bei Schiller, ein Vergleich. Ib.

II. 1) Die Verhältnisse, unter welchen das Christenthum in die Welt trat. Ia.

2) Schiller als sittlicher Erzieher seines Volks. (Mit Rücksicht namentlich auf dessen Romanzen und lyrisch-didactische Dichtungen.) Ib.

III. 1) Das tragische Geschick menschlicher Weisheit, nachgewiesen an König Oedipus des Sophokles. Ia.

2) Worin besteht die wahre Größe eines Luther, (Columbus oder Gutenberg)? Ib.

IV. 1) Welches ist der gemeinsame Zug, der durch alle Ereignisse der Reformationszeit geht? Ia.

2) Schiller's Braut von Messina von den Schlußworten aus betrachtet. Ib.

V. 1) Die Verdienste des Demosthenes um sein Vaterland. (Mit Beziehung auf die Rede für den Kranz.) Ia.

2) Versuch die Abdankung Kaisers Karl V. zu erklären. (Besonders aus politischen Gründen.) Ib.

VI. 1) Cultur und Civilisation haben sich immer mit der erweiterten Völkerverbindung gehoben. Ia.

2) Uhland's Ansicht von der Bedeutung und Stellung der Dichtkunst mit Hinblick auf Schiller. (Aus einigen seiner Balladen entwickelt.) Ib.

VII. 1) Ueber den Zusammenhang der Literatur mit der jedesmaligen Zeitrichtung in den einzelnen Perioden. (Nachzuweisen an der griechischen, der römischen oder der deutschen Literatur.) Ia.

2) Ueber einige characteristische Züge deutschen Wesens, die im Nibelungenliede verherrlicht werden. Ib.

VIII. Noth und Leid die beste Schule der Erkenntniß. Ia. u. b.

IX. „Wallenstein's Lager" im Verhältniß zu den beiden anderen Dramen der Trilogie und zur Geschichte betrachtet. Ib.
(Der X. Aufsatz fiel während der Abiturienten-Prüfung aus.)

Ueber folgende, meist selbst gewählte Themen sind freie Vorträge gehalten worden:

1) Character der griechischen Ethik. 2) Luther und Melanchthon sich gegenseitig ergänzend. 3) Pizarro's Tod. 4) Die Eroberung Mexiko's durch Cortes. 5) Ist Antigone die würdige Heldin einer Tragödie? (in verneinendem Sinne). 6) Widerlegung der dem Character der Antigone gemachten Vorwürfe. 7) Pizarro's Eroberung von Peru. Lorenzo Medici's Verdienste um die italienische Literatur. 9) Character des Kreon im Oedipus und in der Antigone des Sophokles. 10) Idee und Plan des Sommernachtstraums von Shakespeare. 11) Luther's Tod. 12) Die Stiftung des Jesuitenordens. 13) Character und Wirksamkeit der Jesuiten nach Macaulay. 14) Herzog Heinrich von Wolfenbüttel. 15) Rede gegen Karl V. 16) Vertheidigung Karl V. 17) Schilderung der Schlacht bei Mühlberg. 18) Die Ausbreitung der Reformation in Braunschweig und Lüneburg. 19) Aehnlichkeiten zwischen den Hellenen und Germanen. 20) Karl's V. in St. Just, nach W. Sterling. 21) Moritz von Sachsen. 22) Uebersicht von W. Scott's Marmion. 23) Gedanken über Lessing's Emilia Galotti. 24) Die Armada Philipp's II. 25) Rom und England, ein Vergleich. 26) Das Characteristische in den reformatorischen Bewegungen in Deutschland, England und Frankreich. 27) Englands Verfahren in Indien angegriffen. 28) Vertheidigung Englands. 29) Proceß und Hinrichtung Karl's I. von England. 30) Belagerung Antwerpens, nach Schiller. 31) Schwedens Befreiung durch Gustav Wasa. 32) Proceß und Hinrichtung Egmont's und Hoorn's. 33) Ueber die Bedeutung der Griechen für die Entwickelung der Menschheit. 34) Uebersicht der Schlacht bei Lützen.

Mit Beziehung auf den Ueberblick über die neuere classische Literatur und als Nachtrag zum vorjährigen Cursus wurden Schiller's Romanzen und lyrisch-didactische Dichtungen im Zusammenhang erklärt; die Braut von Messina, die Abhandlung über naive und sentimentale Dichtung gelesen, von den

Dichtungen der romantischen Schule nur kleinere Gedichte und Bruchstücke größerer Werke mitgetheilt, das meiste der Privatlectüre oder der Declamationsstunde überwiesen. In Anschluß an die Uebersicht über die deutsche Literatur im Mittelalter wurden sowohl kleinere Dichtungen, wie das Hildebrandslied Ludwigslied, als auch größere, wie der Heliand, theils im Original, theils in Uebersetzung mitgetheilt, von anderen genauere Inhaltsangaben gegeben oder Bruchstücke derselben aus „Gödeke's Mittelalter" im Original gelesen. Hierauf folgte die umfänglichere Lectüre einer Auswahl aus dem Nibelungenliede (nach Wackernagel's Edelsteinen d. D.), der Gudrun (nach Ettmüller's Ausgabe), Inhaltsangabe von Tristan und Isolt, Parzival, Lectüre der Minnesänger nach Wackernagel's Edelsteinen.

B. In Ober-Secunda (3 Stunden wöchentlich Lehners) wurden 12 Aufsätze über folgende Themen geliefert:

1) Die Erinnerung an überstandene Leiden ist uns meistenstheils erfreulich. Olim meminisse juvavit.

2) Der Fluß, ein Bild des menschlichen Lebens.

3) Siegfried's Character.

4) Vercingetorix, der letzte Gallier.

5) Achilleus bis zum Sühneversuch.

6) Hat Homer bei dem Sühneversuch (Ilias IX) die drei Reden des Odysseus, Phoinix und Aias genau nach dem Character eines jeden einzelnen Redners angelegt.

7) Hannibal's Anrede an seine Soldaten beim ersten Anblicke Italiens.

8) Es giebt auch eine verwerfliche Nachsicht.

9) Der Gehorsam (erste Hälfte).

10) Der Gehorsam (zweite Hälfte).

11) Schiller's Urtheil über das französische Drama.

12) Wallenstein's Lager im Verhältnisse zu Schiller's früheren dramatischen Dichtungen.

Außerdem wurden einmal wöchentlich Uebungen im freien mündlichen Vortrage gehalten, wobei die Wahl des Stoffes den Schülern überlassen blieb. Gelesen wurde der nibelunge nôt aus Wackernagel's Edelsteinen, dann Auswahl aus Schiller's Gedichten, besonders diejenigen, in denen er seine Kunstansichten ausführt, endlich Wallenstein.

In Unter-Secunda: (3 Stunden wöchentlich Wiedasch) wurden folgende Themen bearbeitet:

I. 1) Die Macht des Gesanges im Bunde mit der göttlichen Gerechtigkeit, nachgewiesen an Schiller's Graf v. Habsburg und Kranichen des Ibykus.
2) Ueber die Grundgedanken von Schiller's Bürgschaft.

II. Die Sage vom Phaëthon ein Spiegelbild für den Menschen. (Nach Ovid Met. B. II.)

III. 1) Kleine Kräfte große Wirkungen, nachgewiesen im Gebiete der Natur.
2) Vergleich zwischen Homer's und Ovid's Schilderung der Unterwelt. (Hom. Od. XI; Ovid Met. IV, 432 ff.)

IV. 1) Ueber den Reichthum des (alten) Orients an Erfindungen und Entdeckungen.
2) Hermann und Dorothea, eine Erzählung nach Göthe.

V. 1) Des Sängers Fluch von Uhland erklärt.
2) Die Aufgabe des Geschichtsschreibers und die Schwierigkeiten derselben, nach Sallust's Eingang zum Catil. und Jugurtha.

VI. 1) Mannhaftigkeit und Selbstbeherrschung das Ziel der Lycurgischen Gesetzgebung.
2) Hermann und Dorothea. Eine Erzählung. (Abth. 2.)

VII. 1) Das Märchen von Uhland erklärt.
2) Ueber den innern Zusammenhang der drei Uhland'schen Gedichte: Klein Roland, Roland Schildträger und König Karls Meerfahrt.

VIII. 1) Eine freie metrische Uebersetzung a) einer Stelle in Virgil's Aeneis I (Aeneas schaut auf den Bau Carthago's); oder b) einer Stelle aus Homer's Ilias I (die Herolde holen die Briseïs). Wahl des Versmaßes aus: Alexandriner, Nibelungenstrophe, Stanze, jamb. Trimeter, fünffüßiger Jambus nach Schiller.

IX. 1) Die Wahl zwischen den beiden Lebenswegen, dem niederen, aber sicheren, und dem erhabenen, aber gefährlichen, mit Beispielen aus Sage, Dichtung und Geschichte belegt.
2) Ueber den Grundgedanken des Uhland'schen Gedichtes: Bertran de Born.

X. 1) Uebersicht über die beiden ersten Bücher von Virgil's Aeneïs, mit vergleichendem Hinblick auf das Homerische Epos.
2) Characteristische Züge der Thierwelt in dem Epos Reinhart Fuchs.

XI. 1) Der Plan von Schiller's Piccolomini und Wallensteins Tod. (Mit besonderer Rücksicht auf Wallensteins Fall.)
2) Achilles und Suhrab, ein Vergleich.

XII. Disposition der zweiten Catilinarischen Rede von Cicero.

Außerdem freie Vorträge über selbstgewählte Themata.
Gelesen wurden:

Schiller's Romanzen sämmtlich; einige von dessen leichteren lyrisch-didactischen Gedichten; eine Reihe Uhland'scher Balladen. Göthe's Hermann und Dorothea; Rostem und Suhrab nach Rückerts Bearbeitung; Nal und Damajanti von demselben (theilweise); die beiden Piccolomini, Wallensteins Tod, Macbeth von Schiller. Aus Schädel und Kohlrausch's Mittelhochdeutschem Lesebuche: Reinhart Fuchs (S. 56—102); Otto mit dem Barte; der arme Heinrich.

2. Lateinisch.

I. Gelesen wurde Folgendes:

A. In der vereinigten Prima: a) (4 Stunden wöchentlich Ahrens) Taciti Historiae L. I, 73—III, 16; Horatii Carmina L. III; Satir. II, 1, 5, 6, 8; Epist. I, 1—13; außerdem cursorisch gegen Schluß des Schuljahres Livius, L. XXI, XXII und Terentii Adelphi. b) (2 Stunden wöchentlich Kühner) Ciceronis Epistolae in Auswahl; Orationes Philipp. I, II und divinatio in Caecilium.

B. In Ober-Secunda: a) (3 Stunden wöchentlich Lehners) Virgilii Aeneis, L. I, II, IV nebst ausgewählten Stellen der übrigen Bücher; Horatii Carmina L. I. nebst einigen Epoden; Ciceronis Cato major. b) (3 Stunden wöchentlich Kühner) Livius L. XXI, XXII, XXIII init.; Terentii Andria.

C. In Unter-Secunda: (6 Stunden wöchentlich Wiebasch) Sallustii Catilina und Ciceronis orationes Catilinariae; Ovidii Metam. L. I—IV mit Auswahl; Virgilii Aeneis, L. I, II.

D. In Ober=Tertia. (5 Stunden wöchentlich Deichmann) Caesar de bello Gall. L. I—V; Sallustii Jugurtha; Ovidii Metamorph., L. I, II mit einigen Auslassungen.

E. In Unter=Tertia: (5 Stunden wöchentlich Stiffer) Caesar de bello Gall. L. I—V, Siebelis tirocinium poeticum L. III, 8—24.

F. In Quarta: (4—5 Stunden wöchentlich Müller) Cornelius Nepos I—VIII und außerdem die vitae von Epaminondas, Eumenes, Hannibal.

II. An schriftlichen Arbeiten wurde Folgendes geliefert:

A. In beiden Primen: (Kühner) monatlich ein freier Aufsatz und ein 3—4 Druckseiten umfassendes Exercitium, welches der Lehrer zu Hause corrigirte, 5—6 Exercitia, welche nur in der Kladde vorgelegt und in der Schule durchgenommen wurden, außerdem eine Anzahl sogenannter loci, d. h. durch schöne Gedanken oder eleganten Ausdruck ausgezeichneter Stellen in prosaischen Klassikern; auch wurde wöchentlich ein extemporale geschrieben. Die Themen der freien Arbeiten waren:

a) in Ober=Prima: 1) de Ajacis moribus nach Sophokles, 2) de Commii Atrebatis sorte nach Cäsar, 3) Thebanorum gloriam cum Epaminonda natam et extinctam esse, 4) de moribus Britannorum nach Cäsar, 5. 6) oratio P. Licinii, qua populo Romano persuadere studet, ut bellum jubeat contra regem Perseum nach Livius, 7) de Periclis in litterarum artiumque cultum meritis, 8. 9) M. Antonii morum notatio e Ciceronis quae appellantur Philippicis orationibus ducta, 10) quibus ex causis Caesaris cum Ariovisto bellum ortum sit, nach Cäsar, 11) Periclis oratio funebris.

b) in Unter=Prima: 1. 2) de Romanorum bellis cum Samnitibus gestis, nach Livius, 3) Massilia bello civili in Caesaris potestatem redigitur, nach Cäsar, 4. 5) de causis belli Peloponnesiaci, nach Thucydides, 6) de Sagunto expugnato, nach Livius, 7. 8) de Caesaris in Britanniam expeditionibus, nach Cäsar, 9. 10) Mucii Scaevolae dictum »et facere et pati fortia Romanum esse« exemplis nonnullis probatur, 11) de Carthaginis excidio, 12) de C. Marcio Coriolano, nach Livius.

B. In Ober=Secunda: (3 Stunden Lehners) wöchentlich ein Exercitium aus Kühner's Anleitung Curs. III p. 216 bis 252, dann aus Xenophontis Anabasis, ferner wöchentlich ein Extemporale. Dazu kamen metrische Uebungen nach Seyffart's Palaestra Musarum.

C. In Unter=Secunda: (3 Stunden Wiebasch) wurde neben dem grammatischen Unterrichte wöchentlich ein Exercitium nach Kühner's Anleitung Curs. II geliefert; daneben mündliche Uebersetzungen aus demselben Buche und wöchentlich ein Extemporale nach Dictaten.

3. Griechisch.

Gelesen wurde

A. In Ober=Prima: (6 Stunden wöchentlich Ahrens) Sophoclis Antigone und Oedipus Col., Aeschyli Prometheus, Aristophanis Nubes, Demosthenes pro corona, Thucydides L. II, c. 1—54.

B. In Unter=Prima: (5 Stunden wöchentlich Kühner) Auswahl aus den griechischen Lyrikern nach Stoll's Anthologie, Sophoclis Ajax, Aristophanis Nubes, Platonis Apologia und Crito, Thucydides L. I c. 1—80.

C. In Ober=Secunda: a) (3 Stunden wöchentlich Lehners) Homeri Ilias L. VI—XI, XVIII, XIX; Xenophontis Memorabilia L. I, 1. 2., II, 7., III, 6. 7. 12. 13. IV, 2; b) (2 Stunden wöchentlich Ahrens) Herodotus L. I, c. 88—fin., Lysiae Oratt. XVI, XIX, XXIV, XXIII.

D. In Unter=Secunda: (4 Stunden wöchentlich Lehners) Homeri Ilias I, V—IX, Xenophontis Anabasis L. III, IV, Herodotus L. II in Auswahl.

E. In Ober=Tertia: (3 Stunden wöchentlich Deichmann) Homeri Odyssea X, XI, VI, VII, VIII, Xenophontis Anabasis L. III.

F. In Unter=Tertia: (3 Stunden wöchentlich Stisser) Homeri Odyssea IX—XII.

Auf Grammatik und Exercitia wurden in Unter=Prima und Ober=Secunda je 1 Stunde wöchentlich verwandt, in Unter=Secunda 2 Stunden, in beiden Tertien je 3 Stunden.

4. Französisch (Fehler).

Gelesen wurde in

Prima: le Misanthrope von Molière, Louis XI von Delavigne, Athalie von Racine.

Ober-Secunda: Lüdeckings Lesebuch Curs. II, Abth. 5. 6. 7. und der größere Theil des Avare von Molière.

Unter-Secunda: aus Lüdecking's Lesebuche.

Von je 2 wöchentlichen Stunden wurde die Hälfte für die Lectüre benutzt, die übrige Zeit für Grammatik und schriftliche Arbeiten.

5. Englisch (Fehler).

Gelesen wurde in

Prima: W. Scott's Marmion Ges. II ff., Shakespeare's Henry IV T. I und Macbeth.

Ober-Secunda: aus Herrig's Lesebuche.

Unter-Secunda: aus W. Irving's sketchbook.

Auch hier diente nur ein Theil von je 2 wöchentlichen Stunden für die Lectüre.

4. Schulfeierlichkeiten.

Bei der öffentlichen Prüfung der unteren Classen, welche am 27. und 28. März stattfand, zeigte der zahlreiche Besuch durch die Eltern und andern Angehörigen der Schüler, wie immer, eine sehr erfreuliche Theilnahme, zu der insbesondere auch die dem Lyceum eigenthümliche Einrichtung der Mappen-censuren beizutragen scheint. Zu besonderer Ehre gereichte es aber dem Lyceum, daß Se. Königl. Hoheit der Kronprinz wiederum, wie schon im Jahr zuvor, unter Begleitung seines Gouverneurs Herrn Obristlieutenant v. Issendorf und seines Hofmeisters Herrn Pabst etwa drei Stunden lang anwesend war und mit aufmerksamster Theilnahme der Prüfung folgte.

Die Schulfeier am Geburtstage Sr. Majestät des Königs, deren Turnus in diesem Jahre das Lyceum traf, wurde in der gewohnten feierlichen Weise unter Theilnahme eines ansehnlichen Publicums am 27. Mai in der Aula begangen.

Die öffentliche Prüfung der obern Classen fand am 21. und 22. December vor einer kleineren, aber achtungswerthen Versammlung statt.

Auch das Concert der Schüler des Lyceums, welches nach alter Sitte im December unter der gewohnten sehr zahlreichen Betheiligung gegeben wurde, darf einigermaßen zu den Schulfeierlichkeiten gerechnet werden.

Anhang.

Anhangsweise soll hier das Verzeichniß der vorhandenen noch brauchbaren Wandcharten und ähnlichen Hülfsmittel für den Unterricht mitgetheilt werden.

Geographische Hülfsmittel.

Ein großer Weilandscher Erdglobus.
" " " Himmelsglobus.
Ein kleiner (Nürnberger) Erdglobus.
Ewalds orographische Karte der ganzen Erde.
Sydows, Wandkarte von Europa. (3 Exempl.)
Schauenburg, hydrographische Karte von Europa.
Sydow, Wandkarte von Deutschland.
Roost, Wandkarte von Deutschland.
Sydow, Wandkarte von Asien. (2 Exempl.)
Sydow, Wandkarte von Afrika. (2 Exempl.)
Sydow, Wandkarte von Amerika. (2 Exempl.)
Sydow, Wandkarte von Australien.

Zum geschichtlichen Unterricht und beim Lesen der Classiker.

Völker, Palästina.
Holle, Palästina.
Spratt, die Ebene von Troja.
Kiepert, Karte der alten Welt zur Zeit des persischen Reiches. (3 Exempl.)
Hoffmann, Karte der alten Welt. (2 Exempl.)
Kiepert, Altgriechenland. (5 Exempl.)
Kiepert, Altitalien. (4 Exempl.)
Kiepert, Umgebungen von Rom. (2 Exempl.)

Kiepert, Römisches Reich. (2 Exempl.)
Holle, Gallien. (2 Exempl.)
Brettschneider, Europa ums Jahr 350.
" Europa zur Zeit Carls des Großen.
" Europa in der zweiten Hälfte des 10. Jahrh.
" Europa zur Zeit der Kreuzzüge.
" Europa zur Ende des 14. Jahrhunderts.
" Europa zur Zeit der Reformation.
" Europa zur Zeit des 30jährigen Krieges.
" Europa von 1700—1789.
" Europa zur Zeit Napoleons.
Stammtafel der regierenden Fürsten des Welfenhauses, (8 Exempl.)

Zum Unterricht in der Naturgeschichte.

Sandberger, das Linnésche Pflanzensystem.
Brünnow, botanische Wandkarte.
Breslauer, Wandtafel zur Botanik.
Eichelberg, naturhistorischer Atlas; Abth.: Säugethiere und Mineralogie.
Außerdem verschiedene kleinere Lehrmittel, die aus deu Classencassen angeschafft sind.

Oeffentliche Prüfung
der unteren Classen des Lyceums
den 15. und 16. April
im Saale des Lyceums.

Freitag, den 15. April, Anfang 8 Uhr. Vorm.

Choral.

Ober-Tertia

$8\frac{1}{4}$ — $8\frac{3}{4}$ Uhr Französisch Oberlehrer Dr. Deichmann.
$8\frac{3}{4}$ — $9\frac{1}{2}$ „ Griechisch. Derselbe.
$9\frac{1}{2}$ — 10 „ Mathematik. Oberlehrer Dr. Guthe.

Declamation.

Unter-Tertia.

10 — $10\frac{3}{4}$ Uhr Ovidius. Oberlehrer Dr. Stisser.
$10\frac{3}{4}$ — $11\frac{1}{4}$ „ Geographie. Oberlehrer Dr. Guthe.
$11\frac{1}{4}$ — 12 „ Griechisch. Oberlehrer Dr. Stisser.

Declamation.

Sonnabend, den 16. April, Anfang 8 Uhr Vorm.

Quinta.

8 — $8\frac{1}{2}$ Uhr Religion. Collaborator Mejer.
$8\frac{1}{2}$ — $9\frac{1}{4}$ „ Latein. Derselbe.
$9\frac{1}{4}$ — $9\frac{3}{4}$ „ Naturgeschichte. Oberlehrer Dr. Guthe.

Declamation.

Quarta.

$9\frac{3}{4}$ — $10\frac{1}{2}$ Uhr Latein. Collaborator Dr. Müller.
$10\frac{1}{2}$ — 11 „ Geschichte. Derselbe.
11 — $11\frac{1}{2}$ „ Französisch. Lehrer Schulze.

Declamation.

Sexta.

$11\frac{1}{2}$ — $12\frac{1}{4}$ Uhr Latein. Lehrer Schulze.
$12\frac{1}{4}$ — $12\frac{3}{4}$ „ Geschichte. Collaborator Mejer.

Declamation.

Die Hefte und Zeichnungen der Schüler werden ausliegen, und die Mappencensuren der einzelnen Schüler den Angehörigen derselben auf Verlangen zur Einsicht ausgehändigt werden.

Dr. H. L. Ahrens, Director.





